

TEORIA DEI SEGNALI B – PRIMO COMPITINO

SEGNALI NOTEVOLI

- Costante: $x(t) = A$
- Gradino unitario: $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$
- Impulso rettangolare: $\Pi(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } |t| > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{per } |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$
- Impulso triangolare: $\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } |t| > 1 \\ 1 - |t| & \text{per } |t| \leq 1 \end{cases}$
- Esponenziale negativo causale: $x(t) = Ae^{-Bt}u(t)$ ($A > 0, B > 0$)
- Sinusoide: $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ - Fasore: $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$ - Sinc: $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$
- Segnali pari e/o dispari: ogni segnale $x(t)$ si può scrivere come la somma della sua parte pari $x_P(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$ e la sua parte dispari $x_D(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$
- Energia su un intervallo: $E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$ - Potenza su un intervallo: $P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

- Moltiplicazione per una costante: $y(t) = Ax(t)$, grafico identico a $x(t)$ con ampiezza scalata di A ; si distinguono vari casi:
 - o $A > 1 \rightarrow$ estensione
 - o $0 < A < 1 \rightarrow$ compressione
 - o $A < -1 \rightarrow$ estensione + ribaltamento
 - o $-1 < A < 0 \rightarrow$ compressione + ribaltamento
- Traslazione temporale: $y(t) = x(t - t_0)$, versione di $x(t)$ ritardata della quantità t_0 ; se $t_0 > 0$ ho una traslazione a destra (ritardo), se $t_0 < 0$ ho una traslazione a sinistra (anticipo)
- Inversione temporale: $y(t) = x(-t)$, grafico di $x(t)$ ribaltato attorno all'asse delle ordinate
- Cambiamento di scala: $y(t) = x\left(\frac{t}{T}\right)$, i valori assunti da $x(t)$ nell'intervallo $[t_1, t_2]$ vengono assunti da $y(t)$ nell'intervallo $[t_1 T, t_2 T]$; si distinguono vari casi:
 - o $T > 1 \rightarrow$ espansione
 - o $0 < T < 1 \rightarrow$ compressione
 - o $-1 < T < 0 \rightarrow$ compressione + ribaltamento
 - o $T < -1 \rightarrow$ estensione + ribaltamento
- Ordine di trasformazione: Moltiplicazione per costante \rightarrow Cambiamento di scala \rightarrow Traslazione \rightarrow Inversione temporale
- Segnali definiti a tratti: è necessario sostituire il nuovo argomento temporale anche negli intervalli stessi

IMPULSO DI DIRAC

- Proprietà di campionamento: $\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau = y(t_0)$
- Area unitaria, quasi ovunque nullo, tende a ∞ nell'origine, simmetria pari, elemento neutro della convoluzione, derivata del gradino unitario $u'(x) = \delta(x)$

CLASSIFICAZIONE SISTEMI – Un sistema può essere:

- deterministici: l'uscita è univocamente determinata una volta assegnato il segnale d'ingresso.
- causale: la risposta del sistema ad un dato istante di tempo t non dipende da valori futuri del segnale di ingresso.
- fisicamente realizzabile: oltre ad essere causale la risposta ad un qualsiasi segnale reale è anch'essa reale.
- senza memoria: l'uscita è una trasformazione istantanea del segnale d'ingresso, che non dipende né da valori futuri né da valori passati.
- stabile (B.I.B.O.): ad ingressi limitati in ampiezza fa corrispondere uscite limitate anch'esse in ampiezza.
- stazionario: ad un dato segnale d'ingresso produce la stessa uscita a prescindere dall'istante di applicazione dell'ingresso.
- lineare: gode del principio di sovrapposizione degli effetti.

RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$

La risposta impulsiva (funzione del tempo) specifica completamente il sistema L.T.I. a cui si riferisce nel **dominio del tempo**. Per calcolare un'uscita basta quindi fare la convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva $y(t) = x(t) * h(t)$. Per calcolarla, $h(t) = y(\delta(t))$.

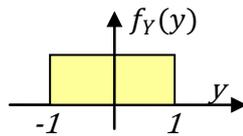
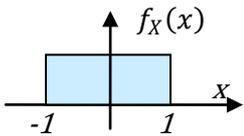
Per trovare l'uscita conoscendo ingresso e $h(t)$ o faccio la convoluzione oppure sapendo che facendo entrare una $A\delta(t-T)$ in uscita avrò la $h(t)$ traslata di T e con ampiezza moltiplicata per A , costruisco il segnale in uscita.

VERIFICA DELLE PROPRIETÀ DI UN SISTEMA

- Linearità: data $y(t) = f(x(t))$, scrivo tre generiche funzioni $y_1(t) = f(x_1)$, $y_2(t) = f(x_2)$, $y_3(t) = f(x_3)$, pongo $x_3(t) = ax_1 + bx_2$, calcolo $y(x_3)$ e controllo che $y(x_3) = y_3(t)$.
- Stazionarietà: data $y(t) = f(x(t))$, calcolo $y(t - t_0)$, calcolo $y(x(\tau - t_0))$ e controllo che $y(t - t_0) = y(x(\tau - t_0))$.
- Causalità: data $y(t) = f(x(t))$, trovo la $h(t)$ sostituendo alle $x(t - t_0)$ una $\delta(t - t_0)$; se $h(t)$ è causale, cioè è nulla $\forall t < 0$, il sistema è causale.
- Stabilità B.I.B.O.: data $y(t) = f(x(t))$ e la sua $h(t)$, controllo che $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$ abbia valore finito.
- Senza memoria: data $y(t) = f(x(t))$, controllo che l'uscita $y(t)$ dipenda solamente da valori $x(t)$ né ritardati né posticipati; solo i sistemi che hanno $h(t) = \delta(t)$ sono senza memoria.

CONVOLUZIONE

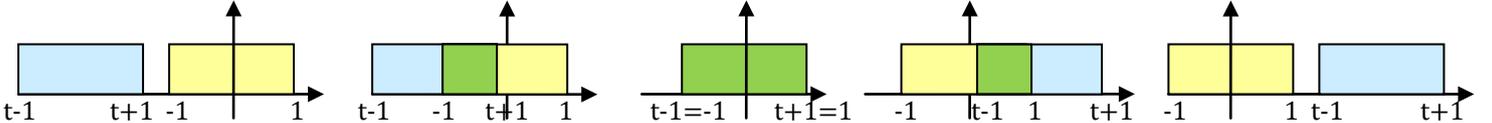
Cerco $z = x * y$



1) Ribalto $f_X(x)$ rispetto all'asse y per ottenere $f_X(-u)$ (in questo es, non cambia)

2) Traslo f_X di un valore generico t per ottenere una $f_X(t - u)$ centrata in t invece che in 0

3) Considero i vari casi al variare di t : nessuna sovrapposizione tra le $f_X(t - u)$ e $f_Y(u)$, parziale sovrapposizione, sovrapposizione completa, sovrapposizione parziale, nessuna sovrapposizione



4) Se la sovrapposizione è nulla, $f_Z(z) = 0$; altrimenti, $f_Z(z) = \int_a^b f_X(t - u) \cdot f_Y(u) du$

5) Il risultato sarà una $f_Z(z)$ definita a tratti a seconda del valore di t .

a e b estremi della sovrapposizione

PROPRIETÀ DELLA CONVOLUZIONE: SISTEMI IN CASCATA E IN PARALLELO

- Commutativa: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
- Associativa: $(x(t) * g(t)) * h(t) = x(t) * g(t) * h(t)$
- Distributiva: $x(t) * (g(t) + h(t)) = x(t) * g(t) + x(t) * h(t)$
- Elemento neutro: la delta di Dirac $\delta(t)$
- Traslazione: $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
- Cascata: la risposta impulsiva totale sarà $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$ mentre quella in frequenza sarà $H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$.
- Parallelo: la risposta impulsiva sarà $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$ mentre quella in frequenza sarà $H(f) = H_1(f) + H_2(f)$.

RELAZIONE DI PARSEVAL

La potenza media di un segnale periodico è pari a $P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$. Sinusoide $\rightarrow P = |X_1|^2 + |X_{-1}|^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO $H(f)$

Funzione che caratterizza il comportamento di un sistema di risposta impulsiva $h(t)$. È una funzione complessa di variabile reale che descrive il sistema nel **dominio della frequenza**. $H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau$. Essendo una funzione complessa, posso scriverla come $H(f) = A_H(f)e^{j\varphi_H(f)}$, cioè attraverso modulo e fase.

SERIE DI FOURIER

Qualsiasi segnale che soddisfi le condizioni di Dirichlet può essere scritto come $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$. I coefficienti X_k , detti coefficienti di Fourier, sono calcolabili come $X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$. Per $k=0$ si ha la componente continua, che altro non è se non il valor medio temporale del segnale.

$$x_k(t) = X_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t} \rightarrow y_k(t) = x_k(t) * h(t) = H(kf_0) \cdot X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) \cdot X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

TRASFORMATA DI FOURIER

ma SE $x(t)$ PERIODICO

ANTITRASFORMATA DI FOURIER

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

PROPRIETÀ

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

$$A_Y(f) = A_X(f) \cdot A_H(f)$$

$$\varphi_Y(f) = \varphi_X(f) + \varphi_H(f)$$

$$y(t) = H(f_0) \cdot x(t)$$

Se $H(f)$ Hermitiana (spettro ampiezza pari, spettro fase dispari; $X_k = X_k^*$ $X(f) = X^*(f)$) $\rightarrow h(t)$ reale \rightarrow fase nulla.

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \xleftrightarrow{\text{(dualità)}} X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} x(-f) \quad Ax(t) \xleftrightarrow{\text{(linearità)}} A \cdot X(f) \quad x\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\text{(cambiamento di scala)}} |T| \cdot X(Tf)$$

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\text{(traslazione temporale)}} X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$x(t + t_0) \xleftrightarrow{\text{(traslazione temporale)}} X(f) e^{j2\pi f t_0}$$

$$x(t) \text{ pari} \leftrightarrow X(-f) = X(f)$$

$$x(t) \text{ dispari} \leftrightarrow X(-f) = -X(f)$$

$$x(t) \text{ reale pari} \leftrightarrow X(f) \text{ reale pari}$$

$$x(t) \text{ reale dispari} \leftrightarrow X(f) \text{ immaginario dispari}$$

FORMULE UTILI SU TRASFORMATE E NON

DOMINIO DEL TEMPO	DOMINIO DELLA FREQUENZA	COMMENTO
$A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$A \cdot T \cdot \text{sinc}(f \cdot T)$	Rect di durata T
$A \cdot e^{-Bt} \cdot u(t)$	$\frac{A}{B + j2\pi f}$	Esponenziale unilatero
$A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$A \cdot T \cdot \text{sinc}^2(f \cdot T)$	Triangolo di durata 2T
$A \cdot \delta(t)$	$X(f) = A$	Delta di Dirac
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$	Delta centrata in t_0
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$	Trasformata fasore
$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}(X(f - f_0) + X(f + f_0))$	Teorema della modulazione
$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$	$\frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$	Trasformata coseno
$\text{sen}(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t})$	$\frac{1}{2j}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$	Trasformata seno

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\text{sen}\theta \quad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\text{sen}\theta \quad z = a + jb = \rho e^{j\theta}$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$